Matemática Discreta

Combinatoria

Combinatoria

Por Juan José Moreno

mbinatoria

generales

- as de la suma y del producto
- ipio de inclusión–exclusión
- ipio del palomar

usuales de conteo

- naciones: permutaciones
- onjuntos ordenados: variaciones
- onjuntos: combinaciones. Números combinatorios.
- rtos: combinaciones con repetición

nes

rácticas:

- a probabilidad de hacerse rico: lotería, bonoloto, etc.
- números puedo representar en un procesador de 32 bits?
- a memoria necesaria para realizar un programa.
- matriculas se pueden generar con el sistema actual?
- posibles números IP hay?

del producto

. (Principio del producto v1) *Supongamos que una tarea se puede dividir en nsecutivas. Si hay n_1 maneras posibles de realizar la primera y n_2 formas de nda tarea después de que la primera haya sido realizada, entonces hay $n_1 n_2$ npletar la tarea.*

cadenas de bits diferentes hay de longitud 7?

matrículas se pueden obtener si cada una contiene 3 letras seguidas de 3

eran los números de 5 cifras. Calcular:

mero de impares y su suma.

mero de los que tienen todas sus cifras distintas. ¿Cuántos son impares?

mero de capicúas y su suma.

funciones se pueden definir entre un conjunto de m elementos y otro de tos? ¿Cuántas de ellas son inyectivas?

subconjuntos se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos?

del producto

2 (Principio del producto v2) *Si A_1, A_2, …, A_m son conjuntos finitos, en-*
e que:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m| \;=\; |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_m| \;=\; \prod_{k=1}^{m} |A_k| \,.$$

os conjuntos, su *producto cartesiano* *es el conjunto:*

$$A \times B \;=\; \{(a,b) \mid a \in A\,, b \in B\}\ .$$

$$= \quad \{1,2,3\}$$

$$= \quad \{a,b,c\}$$

$$= \quad \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$$

de la suma

4 (Principio de la suma v1) *Si una tarea se puede hacer de n_1 formas y una se puede hacer de n_2 formas y ambas tareas son incompatibles, entonces hay as de realizar una de las dos tareas.*

teca de una universidad tiene 40 libros de texto sobre `html` y 50 libros `p/ip`. ¿Cuántos libros de texto puede escoger un estudiante interesado iera de estas dos materias?

ante puede escoger un proyecto fin de carrera de entre tres listas. Cada as contiene respectivamente 23, 15 y 19 propuestas. ¿Cuántos posibles tiene el estudiante para elegir?

de la suma

(Principio de la suma v2) *Si $A_1, A_2, \dots, A_m$ son conjuntos finitos y dis-*
os, se tiene que:

$$\cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| \;=\; |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m| \;=\; \sum_{j=1}^{m} |A_j|\,.$$

A y B son disjuntos si $A \cap B = \emptyset$.

$$\begin{aligned} A &= \{1,2,3,a\} \\ B &= \{1,a,b,c\} \\ A \cup B &= \{1,2,3,a,b,c\} \\ A \cap B &= \{1,a\} \end{aligned}$$

plos

ros de tres cifras mayores de 500 y pares se pueden escribir con los dígitos 2,

neras distintas se pueden sentar en seis butacas consecutivas tres chicos y tres
ra que no haya dos chicos ni dos chicas consecutivas?

cadenas de bits hay de longitud ocho?

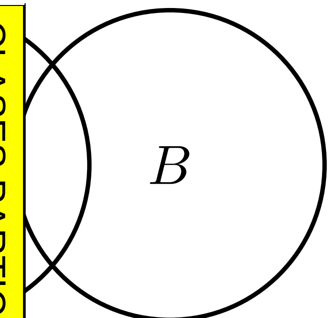
de longitud diez empiezan y acaban por 1?

tienen longitud menor o igual que seis?

rincipio de inclusión-exclusión

(Principio de inclusión-exclusión v1)

$$|A \cup B| \; = \; |A| + |B| - |A \cap B|$$



$|A| + |B|$ cuenta dos veces el conjunto $A \cap B$.

Si A y B son disjuntos $\Rightarrow$ Regla de la suma.

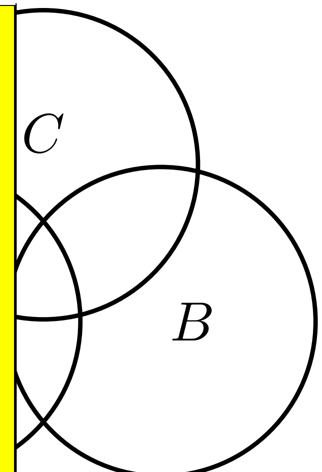
cadenas de 10 bits o bien comienzan por 000 ó bien acaban en 00?

enteros positivos ≤ 100 ó bien son divisibles por 4 ó bien por 6?

rincipio de inclusión-exclusión

3 (Principio de inclusión-exclusión v2)

$$| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$



$|A|+|B|+|C|$ cuenta:

dos veces cada intersección de 2 conjuntos,

tres veces la intersección de los 3 conjuntos.

Al quitar $|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|$ nos falta $|A\cap B\cap C|$

ar el número de enteros positivos n tales que $1\leq n\leq 100$ y n no sea de 2, 3 y 5.

rincipio de inclusión-exclusión

) (Principio de inclusión exclusión v3)

$$
\begin{aligned}
A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \;=\; & \sum_{1\le i\le n} |A_i| \;-\; \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| \\
& + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \;-\; \cdots \\
& + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

10 (Principio de inclusión exclusión v4) *Sean* $A_i \subset S$ *con* $1 \le i \le n$.

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}| &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| \\
&= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \,.
\end{aligned}
$$

$$\cap \cdots \cap \overline{A_n} = \{x \mid x \notin A_1\,, x \notin A_2\,, \ldots\,, x \notin A_n\}$$

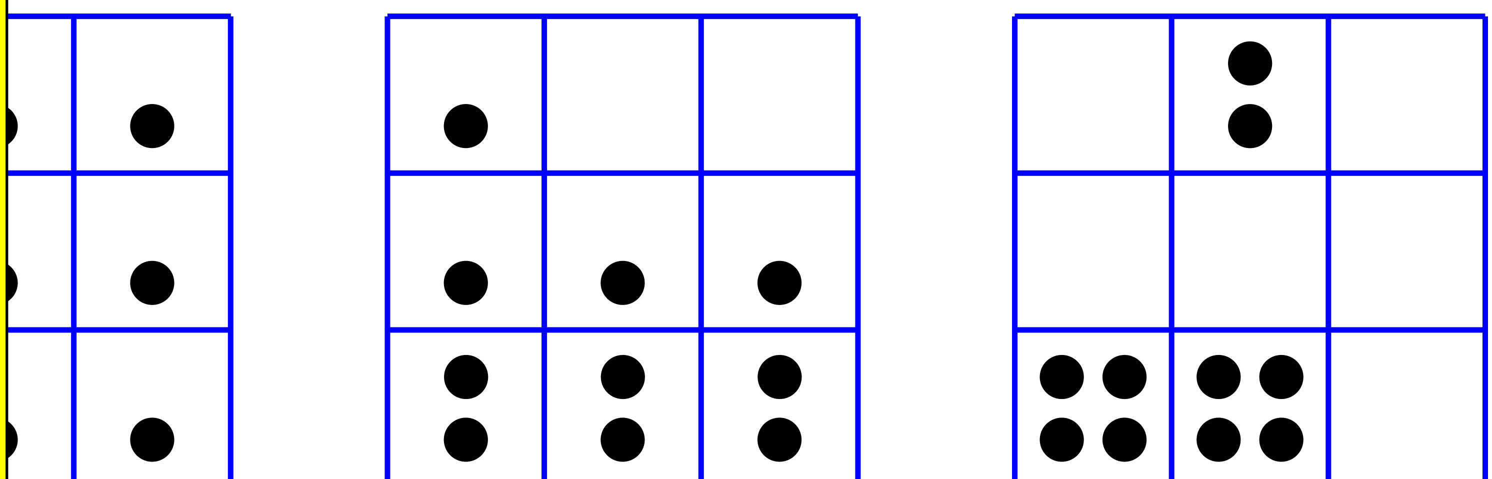
$$A \;\Rightarrow\; |\overline{A}| = |S| - |A|$$

rincipio del palomar

.1 (Principio del palomar v1) *Si $k+1$ ó más objetos se colocan en k cajas, s una caja que contiene dos o más objetos.*

: Supongamos que ninguna de las k cajas tiene más de un objeto. mero de éstos será como mucho k, lo que contradice la hipótesis de

$= 9$



...rincipio del palomar

...ıpo de 367 personas debe haber al menos dos que cumplan los años el ...a.

...ıier grupo de 28 palabras en español debe haber al menos dos que ...n por la misma letra.

... estudiantes debe haber en una clase para garantizar que al menos dos ...ı misma nota en un examen puntuado entre 0 y 100?

...2 (Principio del palomar generalizado) *Si se colocan N objetos en k cajas, ...s una caja con al menos $\lceil N/k \rceil$ objetos.*

...o $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil = y \in \mathbb{Z}$ tal que $y \geq x$ con $y = \min_{z \in \mathbb{Z}} |z - x|$.

$$\frac{2}{5} = 0.4 \Rightarrow \left\lceil \frac{2}{5} \right\rceil = 1$$

$$-\frac{2}{5} = -0.4 \Rightarrow \left\lceil -\frac{2}{5} \right\rceil = 0$$

rincipio del palomar

upo de 100 personas hay al menos $\lceil 100/12 \rceil$ que nacieron el mismo mes.

estudiantes debe haber en una clase para garantizar que al menos seis
a misma nota en un examen puntuado con las notas SS, A, N, SB, MH?

cartas deben ser seleccionadas de una baraja española de 40 cartas para
r que la menos 3 son del mismo palo?

plos

os números de cinco dígitos se pueden formar con el conjunto $\{1, 2, 3\}$ *tales os tres dígitos (es decir, que cada dígito aparezca al menos una vez).*

úmero de enteros $1 \leq n \leq 100$ *tal que* n *no sea múltiplo de 2, 3 y 5.*

nero de palabras de cinco letras que se pueden formar usando el alfabeto inglés anera que no haya dos letras consecutivas iguales.

cadenas de bits de longitud menor o igual que $n \in \mathbb{N}$ *están formadas e por unos?*

cadenas de bits de longitud 7 *o bien empiezan por dos ceros o bien acaban por*

romo *es una cadena de bits que al invertirse es idéntica a sí misma (por* 010110100*). ¿Cuántas cadenas de bits de longitud* n *son palíndromos?*

plos

ene 10 *bolas rojas y* 10 *bolas negras. Se eligen al azar, a oscuras sin ver su*
plazarlas tras haberlas sacado.

bolas deben sacarse para estar seguros de tener al menos tres bolas del mismo

bolas deben sacarse para estar seguros de que hay al menos tres bolas define el **factorial de n** como $\quad n! \;=\; n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1.$

.4 (Permutaciones de n objetos) *n objetos diferentes se pueden ordenar de* *stintas.*

cuántas maneras se pueden ordenar 10 personas en fila?

.5 (Permutaciones con repetición) *El número de maneras distintas de* *etos clasificados en k grupos de objetos idénticos entre sí (con n_1 elementos* *elementos el segundo, etc) es*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} \equiv \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}\,, \qquad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{k} n_i \;=\; n\,.$$

palabras de 11 letras se pueden formar con $a, a, a, a, a, b, b, b, c, d, d$?

permutaciones de los símbolos S_1, S_2, S_3, S_4 tienen a S_1 y S_2 vos y en ese orden?

resultados distintos se pueden obtener al barajar un baraja española de ? ¿Y al barajar juntas dos barajas españolas?

de conteo: Subconjuntos ordenados

.6 **(Variaciones de r objetos tomados de entre n)** *Dado un conjunto de n*
rentes podemos extraer

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \equiv V(n,r)$$

ordenados de r elementos.

$V(n,n) = n!$ si defino $0! = 1$.

rrera entre 7 atletas, ¿de cuántas maneras se pueden atribuir las medallas
ata y bronce?

ionan 4 cartas secuencialmente de una baraja francesa de 52 cartas.
r la probabilidad de:

r cuatro ases.

r todas las cartas del mismo palo.

ce: $\text{Probabilidad} = \dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

.7 (Variaciones con repetición) *Dado un conjunto de n elementos diferentes, ner n^r subconjuntos ordenados de r elementos si permitimos repeticiones.*

nación de un candado tiene 5 dígitos.

l es el número de combinaciones posibles?

l es el número de combinaciones posibles si los números han de ser tos?

l es el número de combinaciones si cada cifra tiene que ser distinta de la ior?

dispone de 12 banderas distintas y puede izar hasta 3 en su mástil de ara indicar alguna circunstancia del barco.

ntos estados diferentes pueden describirse?

ntos estados diferentes pueden describirse si el barco dispone de 3 s iguales de banderas?

cadenas

ndar 1 (Variaciones con repetición)

denas de longitud N que se pueden formar con k elementos distintos es k^N.

ndar 2 (Variaciones)

denas de longitud N que se pueden formar con k elementos distintos de
guno aparezca más de una vez es

$$k(k-1)\cdots(k-N+1) \;=\; \frac{k!}{(N-k)!} \;=\; V(k,N)\,.$$

(Permutaciones): Si $N=k$, hay $=N!$ reordenaciones de una cadena (con elementos diferentes).

ndar 3 (Permutaciones con repetición)

denas de longitud n que se pueden formar con k elementos distintos de
rimero aparezca n_1 veces, el segundo n_2 veces, etc es

$$\left.\begin{matrix} n \\ n_1, n_2, \ldots, n_k \end{matrix}\right) \;\equiv\; \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}\,, \qquad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{k} n_i \;=\; n\,.$$

de conteo: subconjuntos

bbinación se aplica a una lista de elementos cuando el orden no importa.

.8 (Combinaciones de r elementos tomados de entre n) *El número de distintos que contengan r elementos que pueden extraerse de un conjunto de iferentes es*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,.$$

I binatorios o coeficientes binomiales: $\binom{n}{r}$ donde $n, r \in \mathbb{Z}_+$ y $n \geq r \geq 0$.

onoloto cada apuesta consiste en elegir seis números del 1 al 49 sin el orden. ¿Cuál es el número de apuestas posibles?

la probabilidad de que en la bonoloto anterior el conjunto de números s de una semana sea disjunto del conjunto de números ganadores de otra

plos

el número de combinaciones de 2 letras que se pueden formar con el $\{A, B, C, D, E\}$ tales que:

e repite ninguna letra.

etras pueden repetirse.

combinaciones hay de tres letras con las restricciones anteriores?

secuencias binarias de longitud 12 tienen exactamente seis 0's? tienen más 0's que 1's?

manos distintas de 5 cartas puede recibir un jugador de póquer?

maneras hay de elegir tres espadas y dos copas de una baraja española?

tas maneras se pueden repartir las 40 cartas de una baraja española en ones iguales de manera que haya dos ases en cada montón? ¿Y si un ene 10 cartas y el otro 30?

sucesivamente 6 monedas. ¿En cuántos casos se obtienen 4 caras y dos

apuestas distintas se pueden hacer en la bonoloto? Si se marcan 10 ¿cuántas apuestas se han realizado?

combinatorios

(Números combinatorios)
$\in \mathbb{Z}_+$ *tales que* $0 \le r \le n$ *definimos el* *número combinatorio* $\binom{n}{r}$ *como*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,,$$

venio definimos $0! = 1$.

rico de los números combinatorios coincide con los elementos del ascal:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$$\binom{n}{r} \equiv \binom{\text{fila}}{\text{columna}}$$

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & a+b & \end{array}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad n \geq 0, \quad 0 \leq r \leq n$$

:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \binom{n}{n-r}$$

dentidad de Pascal)

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}, \quad n \geq 0, \quad 0 < r \leq n$$

:

$$) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right] = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = \binom{n+1}{r}$$

combinatorios

Teorema del binomio de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}, \quad n \geq 0$$

: Al expandir $(x+y)^n$ sólo tengo términos del tipo $x^k y^{n-k}$ con
El número de términos del tipo $x^k y^{n-k}$ con k fija es igual al número de
coger k x's [y $(n-k)$ y's], luego es igual a $\binom{n}{k}$. □

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1 \\
(x+y)^1 &= x+y \\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4
\end{aligned}$$

combinatorios

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,, \quad n \geq 0$$

$$+ \binom{10}{1} 2 + \binom{10}{2} 2^2 + \ldots + \binom{10}{10} 2^{10} = (1+2)^{10} = 3^{10}$$

Para todo $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n\,,$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{k} = 0\,.$$

r el número de maneras de colocar tres A's y siete B's de manera que no A's consecutivas.

zación: Encontrar el número de cadenas de bits que puedo formar con m unos y tales que no haya dos unos consecutivos.

r el número de maneras de seleccionar tres cifras distintas del conjunto $\ldots, 9\}$ y tales que no haya dos cifras consecutivas?

combinatorios

dentidad de Vandermonde) *Para todo* $n, m \geq 0$ *y* $0 \leq k \leq m + n$ *se*

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{q=0}^{k} \binom{m}{k-q} \binom{n}{q}.$$

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ para todo } n, k \in \mathbb{Z}_+ \text{ tales que } k > n.$$

ue $\displaystyle \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$

ue $\displaystyle \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \binom{n-1}{m-k-1} = \binom{n+m-1}{n}.$

26 (Repartos) *Si hay que repartir r objetos iguales en n grupos y todos los de contar con algún objeto, entonces existen*

$$\binom{r-1}{n-1}$$

tos.

: Cada reparto tiene la siguiente forma (por ejemplo con $r=9$ y $n=6$)

○ | ○ ○ | ○ | ○ ○ ○ | ○ | ○

r las $n-1$ barras (que delimitan los n grupos) en cualquiera de las $r-1$ ones. Luego, el número de repartos es el indicado arriba. En el caso a de colocar 5 barras separadoras en 8 posiciones posibles, con lo que posibles maneras.

de conteo: repartos

27 (Combinaciones con repetición) *Si hay que repartir r objetos iguales en*
nces existen

$$\binom{n+r-1}{r}$$

tos.

: Cada reparto tiene la siguiente forma (por ejemplo con $r = 9$ y $n = 7$)

$$\times \mid \times\times \mid\mid \times \mid \times\times \mid \times \mid \times\times$$

r las $n-1$ barras (que delimitan los n grupos) en cualquiera de las bles posiciones. Luego, el número de repartos es

$$\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{r+n-1}{r}. \qquad \square$$

an simultáneamente 6 dados iguales, ¿cuántos resultados son posibles?

r en un calendario las fechas de cumpleaños de r personas, ¿cuántas ciones diferentes se pueden obtener?

tas maneras se pueden repartir r bolas idénticas en n urnas de manera rna prefijada contenga exactamente $k \leq r$ bolas?

tas maneras se pueden repartir r bolas en n urnas de manera que k de n vacías?

tas maneras se pueden colocar en fila 2 bolas blancas y 3 bolas negras de ue haya 2 rachas de bolas negras?

ación: ¿De cuántas maneras se pueden colocar en fila a bolas blancas y egras de manera que haya $k+1$ rachas de bolas negras?

ndar 4 (Combinaciones)

le de combinaciones de tamaño k consistentes en elementos distintos de un

lementos es $\binom{n}{k}$.

ndar 5

denas que puedo formar con m 0's y n 1's y tales que no haya dos 1's

$\binom{m+1}{n}$.

ndar 6

mbinaciones de k elementos elegidos de entre n elementos permitiendo que

s y tal que aparezcan todos ellos es $\binom{k-1}{n-1}$.

ndar 7 (Combinaciones con repetición)

mbinaciones de k elementos elegidos de entre n elementos permitiendo que

s es $\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$.

Métodos para elegir r de entre n

	Con Orden	Sin Orden
Sin Repetición	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$	$\dbinom{n}{r}$
Con Repetición	n^r	$\dbinom{n+r-1}{r}$

28 *Sea un conjunto S de $m \cdot n$ elementos. Entonces S puede romperse en n* *n elementos de*

$$\frac{(m \cdot n)!}{(m!)^n \, n!}$$

tas.

: Queremos repartir $m \cdot n$ elementos en n cajas distintas de manera que ellas haya m elementos y que el orden no importe. Luego hay

$$\frac{(n \cdot m)!}{\underbrace{m!m! \cdots m!}_{n \text{ términos}}} = \frac{(n \cdot m)!}{(m!)^n}$$

es de hacerlo. Como no nos importa el orden de las n cajas, hemos de $\square$

tas maneras se pueden emparejar seis personas?

resa de ventas tiene que inspeccionar las ventas en 20 ciudades. Se para ello 5 miembros del personal, cada uno de los cuales supervisará 4

cuántas maneras se pueden agrupar las ciudades en cinco grupos de o?

cuántas maneras se pueden asignar las ciudades a los inspectores?

29 *El número de particiones de un conjunto de m elementos del tipo* $, m_n)$ *con* $\sum_k m_k = m$ *es*

$$\binom{m}{m_1, m_2, \ldots, m_n} \prod_{k \geq 1} \frac{1}{r_k!} \, ,$$

l número de partes con k elementos.